UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2008-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **29/12/2008**
DACIBAHCC **1h 50m**

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN SUSTITUTORIO
DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1
Dada la matriz A y el vector columna b

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4+\dfrac{1}{n^2}\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\ 2-\dfrac{1}{n^2}\end{pmatrix}$$

a) Resolver el sistema $Ax=b$ utilizando eliminación Gaussiana con pivoteo parcial para n=1.
b) Hallar el condicionamiento de A para cualquier número natural n, utilizando la norma infinita.
c) Utilizando el condicionamiento de la matriz A, estimar el error relativo que se puede cometer en la solución al resolver el sistema $Ax=\tilde{b}=(1,\ 2)^T$ con n=100.

Solución

(a)

$$x=(\ 3,\ -1)^T$$

(b)

$$cond_\infty(A)=\|A\|_\infty\,\|A^{-1}\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty=\max\{\ 1+2,2+4+1/n^2\}=6+1/n^2$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1+4n^2 & -2n^2\\ -2n^2 & n^2\end{pmatrix}\Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty=\max\{\ 1+6n^2,3n^2\}=1+6n^2$$

$$\therefore\ cond_\infty(A)=(6+1/n^2)(1+6n^2)=36n^2+12+1/n^2$$

(c)

$$Para\quad n=100$$

$$cond_\infty(A)=36*10^4+12+10^{-4}=350012.0001$$

$$\Delta b=(0\quad 10^{-4})^T\Rightarrow\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}=\frac{1}{2n^2-1}=\frac{1}{19999}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le cond_\infty(A).\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}=17.0015$$

Problema 2
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Newton-Raphson con Matlab, complete la parte faltante.

$$f_1(x,y,z) = x^4 - 10x + 5y - z + 3 = 0$$
$$f_2(x,y,z) = y^3 + sen(y) - 2x - 2z - 5 = 0$$
$$f_3(x,y,z) = x \;\; + y - 10z + 2sen(z) + 5 = 0$$

```
function [x,iter]= nrap(f,fp,x0,tol,imax)
if nargin<4
   tol=1.0e-4;
end
if nargin<5
   itermax=20;
end
x=x0;
normx=0;
normz=inf;
iter=0;
while (normz>tol*normx)&(iter<=imax)
   f0=feval(f,x);
   fp0=feval(fp,x);

   z=_________________;
   normz=norm(z,2);
   normx=norm(x,2);
   x=x+z;
   iter=iter+1;
end
```

%Funcion del sistema
function G=fun(x)

G=[__________________________

____

______________________________];

%Jacobiano del sistema
function G=jfun(x)

G=[______________ ________
____

________ ________________
____

Orden en matlab
>>x=nrap('fun','jfun',[1 1 1]',10^-3,1000)

Solución

```
function [x,iter]= nrap(f,fp,x0,tol,imax)
if nargin<4
   tol=1.0e-4;
end
if nargin<5
   itermax=20;
end
x=x0;
normx=0;
normz=inf;
iter=0;
while (normz>tol*normx)&(iter<=imax)
   f0=feval(f,x);
   fp0=feval(fp,x);
   z=-fp0\f0;
   normz=norm(z,2);
   normx=norm(x,2);
   x=x+z;
   iter=iter+1;
end
```

```
%Función del sistema
function G=fun(x)
G=[x(1)^4-10*x(1)+5*x(2)-x(3)+3
x(2)^3+sin(x(2))-2*x(1)-2*x(3)-5
x(1)+x(2)-10*x(3)+2*sin(x(3))+5];
```

```
%Jacobiano del sistema
function G=jfun(x)
G=[(4*x(1)^3)-10     5    -1
   -2     3*x(2)^2+cos(x(2))     -2
   1    1   -10+2*cos(x(3))];
```

Problema 3

a) Probar que si g interpola a f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ y h interpola a f en los nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces, la función:

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x))$$

Interpola a f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (g y h no necesitan ser polinomios).

b) Encontrar el polinomio de interpolación de Lagrange g(x) en los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$ y el polinomio de interpolación de Lagrange en los nodos $\{x_1, x_2, x_3\}$ y aplicar el apartado anterior para obtener el polinomio de interpolación en los nodos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ de una función f(x) definida por la tabla siguiente:
$x = -1, 0, 1, 2$
$f = 2, -1, 0, 5$

c) Encontrar el polinomio de interpolación de Lagrange para la tabla siguiente:
$x = -1, 0, 1, 2, 3$
$f = 2, -1, 0, 5, 14$
Comparar con el resultado obtenido en el apartado anterior y explicar el resultado.

Solución

a)Basta comprobar que la nueva función

$$k(x) = g(x) + \frac{x0 - x}{xn - x0}(g(x) - h(x))$$

cumple las condiciones de interpolación, es decir, k(xj) = f(xj), j = 0, 1, 2, ..., n

En efecto:

$$k(x0) = g(x0) + \frac{x0 - x0}{xn - x0}(g(x0) - h(x0)) = g(x0) = f(x0)$$

$$k(xj) = g(xj) + \frac{x0 - xj}{xn - x0}(g(xj) - h(xj)) = g(xj) = f(xj)$$

para j = 1, 2, ..., n − 1

$$k(xn) = g(xn) + \frac{x0 - xn}{xn - x0}(g(xn) - h(xn)) = h(xn) = f(xn)$$

b)La tabla de diferencias divididas es:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	2	-3	2	0	0
0	-1	1	2	0	
1	0	5	2		
2	5	9			
3	14				

Por lo tanto,

$g(x) = 2 - 3(x + 1) + 2(x + 1)x$

$h(x) = -1 + x + 2x(x - 1)$

$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x)) = -1 - x + 2x^2$

c) Utilizando la tabla completa de diferencias divididas anterior resulta el mismo polinomio de grado 2. Tiene sentido, ya que el polinomio encontrado pasa por los puntos (2, 5) y (3, 14).Es decir, estos dos nodos no añaden ninguna información a la dada por los restantes nodos.

Problema 4

La distribución de temperaturas en una placa rectangular de 1m. x 0.9m. obedece a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$xy\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2x + y \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 0.9$$

Se sabe que en el borde exterior la temperatura obedece a la siguiente relación:

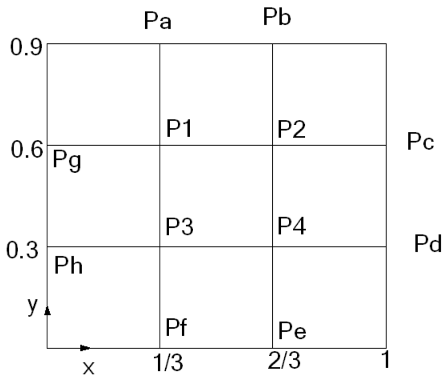
$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

Se desea hallar la distribución interna de temperaturas.

a) Realice la discretización usando una malla rectangular (Δx =1/3, Δy =0.3)
b) Plantee el sistema de ecuaciones lineales usando el método de las diferencias finitas
c) Resolver el sistema dado en b) usando eliminación de Gauss.

solucion

a)



Condiciones de Frontera:

$$P_a = (1/3)^2 + 0.9^2$$
$$P_b = (2/3)^2 + 0.9^2$$
$$P_c = (1)^2 + 0.6^2$$
$$P_d = (1)^2 + 0.3^2$$
$$P_e = (2/3)^2 + 0^2$$
$$P_f = (1/3)^2 + 0^2$$
$$P_g = (0)^2 + 0.6^2$$
$$P_h = (0)^2 + 0.3^2$$

b) Planteando las ecuaciones en diferencias finitas:

Nodo P1: x=1/3 y=0.6

$$\frac{1}{3}(0.6)\left(\frac{P_2 - 2P_1 + P_g}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{1}{3} + 0.6\right)\left(\frac{P_a - 2P_1 + P_3}{\Delta y^2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 0.6$$

Nodo P2 x=2/3 y=0.6

$$\frac{2}{3}(0.6)\left(\frac{P_c - 2P_2 + P_1}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{2}{3} + 0.6\right)\left(\frac{P_b - 2P_2 + P_4}{\Delta y^2}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right) + 0.6$$

Nodo P3 x=1/3 y=0.3

$$\frac{1}{3}(0.3)\left(\frac{P_4 - 2P_3 + P_h}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{1}{3} + 0.3\right)\left(\frac{P_1 - 2P_3 + P_f}{\Delta y^2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 0.3$$

Nodo P4 x=2/3 y=0.3

$$\frac{2}{3}(0.3)\left(\frac{P_d - 2P_4 + P_3}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{2}{3} + 0.3\right)\left(\frac{P_2 - 2P_4 + P_e}{\Delta y^2}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right) + 0.3$$

Los Profesores